

Uitwerkingen

Inleiding

Dit zijn voorbeeld uitwerkingen. ChatGPT zal verschillende antwoorden geven, dus dit is niet altijd representatief, maar het geeft een idee van hoe het eruit moet komen te zien. Ook zijn deze uitwerkingen niet helemaal compleet. Wij geven hierin alleen het gebruik van ChatGPT als voorbeeld.

Opgave 1 a

Deze opgave was vraag 6 van het eindexamen 2021 wiskunde B tijdvak 3

Ik stelde de vraag als volgt aan ChatGPT:

"Bereken T met de formule $C = a - b \cdot \ln(\ln(T/(T-1)))$, met $T > 1$, $C = 12000$, $a = 5734$ en $b = 1648$."

Dit antwoord kreeg ik:

Laten we de gegeven formule gebruiken om T te berekenen:

$$C = a - b \ln(\ln(\frac{T}{T-1}))$$

We weten dat C gelijk is aan 12000, a gelijk is aan 5734 en b gelijk is aan 1648. Dus de formule wordt:

$$12000 = 5734 - 1648 \ln(\ln(\frac{T}{T-1}))$$

Laten we dit stap voor stap oplossen. Stap 1: Vereenvoudig de vergelijking.

$$1648 \ln(\ln(\frac{T}{T-1})) = 5734 - 12000$$

Stap 2: Bereken de rechterkant van de vergelijking.

$$\ln(\ln(\frac{T}{T-1})) = \frac{5734 - 12000}{1648}$$

Stap 3: Vereenvoudig de rechterkant van de vergelijking.

$$\ln(\ln(\frac{T}{T-1})) = -0.69207317$$

Stap 4: Verwijder de natuurlijke logaritme door de inverse functie toe te passen, exponentiëren.

$$\ln(\frac{T}{T-1}) = e^{-0.69207317}$$

Stap 5: Bereken $e^{-0.69207317}$.

$$\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) = 0.50000000$$

Stap 6: Verwijder de tweede natuurlijke logaritme door de inverse functie toe te passen, exponentiëren.

$$\frac{T}{T-1} = e^{0.50000000}$$

Stap 7: Bereken $e^{0.50000000}$.

$$\frac{T}{T-1} = 1.64872127$$

Stap 8: Los de vergelijking op voor T door T te isoleren.

$$T = (T-1) \cdot 1.64872127$$

Stap 9: Vereenvoudig de vergelijking.

$$T = 1.64872127 \cdot T - 1.64872127$$

Stap 10: Breng T-termen naar één kant en constante termen naar de andere kant.

$$1.64872127 \cdot T - T = 1.64872127$$

Stap 11: Combineer de T-termen.

$$0.64872127 \cdot T = 1.64872127$$

Stap 12: Deel beide kanten van de vergelijking door 0.64872127.

$$T = \frac{1.64872127}{0.64872127}$$

Stap 13: Bereken de waarde van T.

$$T = 2.53606798...$$

Dus, met de gegeven waarden is T ongeveer gelijk aan 2.53606798.

Dit antwoord klopt niet.

In stap 3 is het antwoord van de berekening onjuist. Goed om te weten is dat ChatGPT niet goed kan rekenen. Verder zijn alle stappen correct maar wel erg omslachtig, vooral vanaf stap 8. 13 stappen voor deze vraag is erg veel.

Opgave 1 b

Deze opgave was vraag 7 van het eindexamen 2021 wiskunde B tijdvak 3

Ik stelde de volgende vraag:

"Geef een stappenplan om de afgeleide

$$\frac{d}{dT} a - b \ln \left(\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right)$$

te berekenen zonder dit zelf te doen."

Dit antwoord kreeg ik:

Om de afgeleide van de functie $\frac{d}{dT} (a - b \ln (\ln (\frac{T}{T-1})))$ te berekenen, kunnen we de volgende stappen volgen:

Stap 1: Identificeer de functie waarvan we de afgeleide willen nemen:

$$a - b \ln \left(\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right)$$

Stap 2: Gebruik de regels van differentiatie om de afgeleide te berekenen. Hier zijn de belangrijkste regels die we kunnen toepassen:

- De afgeleide van een constante (zoals a en b in dit geval) is altijd nul.
- De afgeleide van een constante vermenigvuldigd met een functie is gelijk aan de constante vermenigvuldigd met de afgeleide van de functie.
- De afgeleide van $\ln(x)$ is $\frac{1}{x}$.
- De kettingregel: als we een functie binnen een functie hebben, moeten we de afgeleide van de buitenste functie vermenigvuldigen met de afgeleide van de binnenste functie.

Stap 3: Pas de regels toe op de gegeven functie. In dit geval hebben we:

- De afgeleide van a is nul.
- De afgeleide van $b \ln (\ln (\frac{T}{T-1}))$ vereist toepassing van de kettingregel en de afgeleide van de natuurlijke logaritme.

Stap 4: Breng de afgeleide regels toe en vereenvoudig waar mogelijk.

Dit stappenplan geeft alle belangrijke regels die nodig zijn om deze vraag op te lossen.

Opgave 2

Deze opgave was vraag 1 van het examen wiskunde B vwo 2022 tijdvak 1.

Ik stelde de volgende vraag:

"Wat is de inverse van $p \cdot \ln(x)$ "

Dit antwoord kreeg ik terug:

Om de inverse van de functie $p \cdot \ln(x)$ te vinden, moeten we op zoek gaan naar een functie $f^{-1}(x)$ waarvoor geldt $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Laten we de inverse vinden door de stappen te volgen:

Stap 1: Stel de functie $y = p \cdot \ln(x)$ op.

Stap 2: Wissel x en y om in de vergelijking.

$$x = p \cdot \ln(y)$$

Stap 3: Los de vergelijking op om y uit te drukken in termen van x .

Dit kunnen we doen door de vergelijking om te vormen:

$$\frac{x}{p} = \ln(y)$$

Nu kunnen we de inverse van de natuurlijke logaritmfunctie toepassen op beide zijden: $e^{\frac{x}{p}} = y$.

Dus de inverse van de functie $p \cdot \ln(x)$ is $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{p}}$.

Deze uitwerking is correct. Goed compact en duidelijk.

Volgt alle stappen die ik zelf ook zou zetten.

Opgave 3

Deze opgave was vraag 1 van het examen wiskunde B vwo 2022 tijdvak 3

Vraag aan ChatGPT:

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{(x-5)} + \frac{1}{(x-6)}$, De functie F gegeven door $F(x) = \ln(x^2 - 11x + 30)$ is dan een primitieve van f . Bewijs dit.

Uitwerking van ChatGPT:

Om te bewijzen dat F een primitieve is van f , moeten we laten zien dat de afgeleide van F gelijk is aan f . We kunnen dit doen door de kettingregel te gebruiken en F te differentiëren.

We beginnen met het vinden van de afgeleide van F :

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \cdot (2x - 11) \quad (1)$$

We weten dat $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6}$, dus we kunnen $f(x)$ als volgt herschrijven:

$$f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} = \frac{(x-6) + (x-5)}{(x-5)(x-6)} = \frac{2}{x^2 - 11x + 30} \quad (2)$$

Nu kunnen we $F'(x)$ herschrijven als:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \cdot (2x - 11) = \frac{2}{x^2 - 11x + 30} \cdot (x-5) \cdot (x-6) \quad (3)$$

Opmerking: we hebben hier de factor $\frac{2}{x^2 - 11x + 30}$ vervangen door $f(x)$ om te laten zien dat $F'(x)$ gelijk is aan $f(x)$ wanneer we het herschrijven in termen van $f(x)$.

Nu kunnen we zien dat $F'(x)$ gelijk is aan $f(x)$ vermenigvuldigd met een constante factor $(x-5) \cdot (x-6)$. Omdat deze factor geen invloed heeft op de afgeleide van F , weten we dat $F(x)$ een primitieve is van $f(x)$, zoals vereist was om te bewijzen.

In vergelijking (2) maakt ChatGPT een fout. Hij had eigenlijk moeten

zeggen dat $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6} = \frac{(x-6)+(x-5)}{(x-5)(x-6)} = \frac{2x-11}{x^2-11x+30} = F'(x)$,

en dan zou hij klaar zijn. Alles wat hij daarna zegt slaat nergens op.

ChatGPT gaat hier volledig de mist in, maar komt wel overtuigend over, dus let op!

Opgave 4

Dit is een voorbeeld van een gesprek met ChatGPT:

< 3/3 >



Hey ChatGPT, kan je mij (een middelbare scholier) uitleggen wat een afgeleide is en wat je er allemaal mee kan?



Natuurlijk! Ik kan je uitleggen wat een afgeleide is en waarom het nuttig is. Als je vragen hebt, stel ze gerust!



Een afgeleide is een concept uit de wiskunde dat wordt gebruikt om de snelheid van verandering van een functie op een bepaald punt te meten. Het geeft aan hoe de functiewaarde verandert als de invoer (meestal aangeduid als x) een kleine verandering ondergaat.

Om het concept van een afgeleide beter te begrijpen, kun je denken aan een grafiek van een functie, bijvoorbeeld een lijn of een kromme. De afgeleide van die functie geeft de helling (steilheid) van de grafiek op elk punt weer. Als de helling positief is, stijgt de functie op dat punt. Als de helling negatief is, daalt de functie op dat punt. En als de helling nul is, betekent dit dat de functie vlak (horizontaal) is op dat punt.

Afgeleiden hebben veel toepassingen in de wiskunde en andere wetenschappelijke disciplines. Hier zijn enkele van de belangrijkste toepassingen:

1. Snelheid en versnelling: In de natuurkunde wordt de afgeleide gebruikt om de snelheid en versnelling van objecten te berekenen. De afgeleide van de positie ten opzichte van de tijd geeft de snelheid aan, en de afgeleide van de snelheid geeft de versnelling aan.
2. Optimalisatie: Afgeleiden worden gebruikt om te bepalen waar een functie maximaal of minimaal wordt. Dit is handig bij het oplossen van optimalisatieproblemen, zoals het vinden van de maximale winst of het minimale verlies.
3. Grafieken tekenen: Afgeleiden helpen bij het tekenen van grafieken van functies. Ze geven informatie over de helling van de grafiek op verschillende punten, wat kan helpen om de vorm van de grafiek te begrijpen.
4. Lineaire benaderingen: Met afgeleiden kun je lineaire benaderingen maken van functies. Dit wordt vaak gebruikt in de numerieke analyse en natuurkunde om complexe problemen te vereenvoudigen.

Dit zijn slechts enkele voorbeelden van de toepassingen van afgeleiden. Het concept is echter veel breder en wordt gebruikt in verschillende takken van de wiskunde en wetenschap. Het begrijpen van afgeleiden kan je helpen om de wereld om je heen beter te begrijpen en complexe problemen op te lossen.



Natuurlijk! Ik kan je uitleggen wat een primitieve is en waarom het nuttig is. Een primitieve (ook wel antiderivaat genoemd) van een functie is een andere functie waarvan de afgeleide gelijk is aan de oorspronkelijke functie.



Laten we het stap voor stap bekijken:

1. Primitieve functie: Een primitieve functie van een gegeven functie $f(x)$ is een nieuwe functie $F(x)$ waarvoor geldt dat de afgeleide van $F(x)$ gelijk is aan $f(x)$. Dit wordt meestal geschreven als $F'(x) = f(x)$.
2. De primitieve geeft het omgekeerde proces van differentiatie aan. Als differentiatie de helling van een functie meet, berekent de primitieve de oorspronkelijke functie zelf.
3. Integratie: Het proces om de primitieve van een functie te vinden, wordt integratie genoemd. Het symbool voor integratie is het integraalteken (\int).
4. Constante van integratie: Het integratieproces resulteert in een primitieve functie, maar er is een belangrijk verschil. Aangezien de afgeleide van een constante altijd nul is, kan elke constante waarde worden toegevoegd aan de primitieve functie. Deze constante wordt de "constante van integratie" genoemd.

Wat kun je doen met primitieven?

1. Berekenen van bepaalde integralen: Een bepaald integraal is het vinden van de waarde van de integraal tussen twee gegeven grenzen. Primitieven maken het mogelijk om bepaalde integralen te berekenen door het verschil in primitieven te nemen tussen de bovengrens en de ondergrens van de integraal.
2. Vinden van oppervlakte onder krommen: Primitieven kunnen worden gebruikt om de oppervlakte onder een kromme in een bepaald interval te berekenen. Dit wordt gedaan door het bepalen van het verschil tussen de primitieven op de grenzen van het interval.
3. Oplossen van differentiaalvergelijkingen: Differentiaalvergelijkingen komen veel voor in de natuurkunde, techniek en andere wetenschappelijke disciplines. Het vinden van de primitieve functie van een differentiaalvergelijking is vaak een belangrijke stap in het oplossen van het probleem.
4. Modelleren van real-world fenomenen: Primitieven stellen ons in staat om functies te creëren die de veranderingen en relaties in real-world fenomenen beschrijven. Dit helpt bij het modelleren en begrijpen van complexe systemen in bijvoorbeeld economie, biologie of natuurkunde.

Kortom, primitieven zijn een krachtig instrument in de wiskunde en wetenschap. Ze stellen ons in staat om de oorspronkelijke functie te herstellen, berekeningen uit te voeren en fenomenen in de wereld om ons heen te modelleren.

Opgave 5

Deze opgave was vraag 8 van het examen wiskunde B vwo 2022 tijdvak 1.

Vraag aan ChatGPT:

De functie f is voor $-\pi < x < \pi$ gegeven door:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}.$$

De functie g is gegeven door $g(x) = \sin(x)$.

Geef een stappenplan om te bewijzen dat de grafieken van f en g elkaar in twee punten raken zonder dit zelf te bewijzen.

Antwoord van ChatGPT:

Om te bewijzen dat de grafieken van de functies f en g elkaar in twee punten raken, kunnen we het volgende stappenplan volgen:

Stap 1: Bepaal de domeinen van de functies $f(x)$ en $g(x)$ om te zien waar ze gedefinieerd zijn. In dit geval is $-\pi < x < \pi$ het domein voor beide functies.

Stap 2: Vergelijk de functies $f(x)$ en $g(x)$ om te zien of er punten zijn waar ze dezelfde waarde hebben. In dit geval zien we dat $f(x) = g(x)$ wanneer $\sin(x)/\sin(2x) = \sin(x)$. Dit komt overeen met de punten waar $\sin(2x) = 1$.

Stap 3: Los de vergelijking $\sin(2x) = 1$ op om de waarden van x te vinden waar de functies elkaar raken. In dit geval is $\sin(2x) = 1$ wanneer $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, waarbij k een geheel getal is.

Stap 4: Los de vergelijking $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ op voor x om de specifieke waarden te vinden waar de functies elkaar raken. Dit geeft $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, waarbij k een geheel getal is.

Stap 5: Concludeer dat de grafieken van de functies $f(x)$ en $g(x)$ elkaar raken op de punten waar $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Aangezien k een geheel getal kan zijn, zijn er twee punten waar de grafieken elkaar raken binnen het domein $-\pi < x < \pi$.

Alle stappen in dit stappenplan zijn correct. Ik had wel specifiek gevraagd dat hij het niet zelf zou bewijzen, en hij heeft dat ook niet volledig gedaan, maar wel deels. Dit kan je hem vertellen, en vragen of hij dat aanpast. Het stappenplan is niet compleet. Nadat je hebt laten zien dat $f(x) = g(x)$ op twee punten binnen het domein, moet je ook nog laten zien dat geldt $f'(x) = g'(x)$ op deze twee punten.

Opgave 6

Deze opgave was vraag 15 van het examen wiskunde B vwo 2021 tijdvak 3.

Vraag aan ChatGPT:

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$. Deze functie heeft een inverse functie $f^{inv}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as, en de y -as. Vlakdeel V wordt gewenteld om de y -as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam. Geef een stappenplan om de inhoud van dit omwentelingslichaam te berekenen zonder dit zelf te doen. Ik mag een grafische rekenmachine gebruiken.

Antwoord van ChatGPT:

Stap 1: Bepaal de grenzen van het vlakdeel V . Aangezien V wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as, moeten we de x -waarden vinden waarbij $f(x) \geq 0$. Dit komt overeen met de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$. Met behulp van een grafische rekenmachine kun je deze oplossingen vinden.

Stap 2: Bereken de lengte van het omwentelingslichaam. De lengte wordt gegeven door de omtrek van de grafiek van f tussen de grenzen van V . Dit kan worden berekend met behulp van de formule voor de omtrek van een functie: $L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, waarbij a en b de grenzen zijn van V .

Stap 3: Bereken de oppervlakte van het omwentelingslichaam. De oppervlakte wordt gegeven door de formule $A = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$. Dit is het integraal van het kwadraat van de functie f over het interval $[a, b]$.

Stap 4: Bereken de inhoud van het omwentelingslichaam. De inhoud wordt gegeven door de formule $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$. Dit is het integraal van het kwadraat van de functie f over het interval $[a, b]$.

Stap 5: Voer de berekeningen uit met behulp van de grafische rekenmachine om de lengte, oppervlakte en inhoud van het omwentelingslichaam te verkrijgen.

Met behulp van dit stappenplan en een grafische rekenmachine kun je de inhoud van het omwentelingslichaam berekenen zonder de volledige berekening zelf te hoeven doen.

Stap 1 klopt niet. De grenzen van het integratie-interval zijn de ondergrens a en bovengrens b op de y -as, aangezien we om de y -as moeten wentelen. Dit doet ChatGPT niet goed. Dus de ondergrens a is 0, aangezien het vlakdeel

V wordt ingesloten door de x -as en y -as, en de bovengrens b is het punt $f(0)$.

ChatGPT lijkt hier niet goed te weten wat wenteling om de y -as is.

Als ik hem daarop wijs doet hij het nog steeds niet goed.

Ook is dit stappenplan veel te omslachtig. Het beantwoorden van deze vraag kan binnen drie stappen.

Stap 2 en 3 zijn niet van toepassing voor de vraag. Stap 4 klopt weer niet helemaal, in plaats van integreren over $(f(x))^2$ moet je over $(f^{inv}(x))^2$ integreren.