

### Inleiding

---

Dit is een opgavenboekje met vragen die gaan over het onderwerp differentiëren en integreren. Dit is bedoeld als ondersteunend lesmateriaal bij het voorbereiden op het eindexamen vwo wiskunde B. Je leert omgaan met ChatGPT.

Er zijn in totaal 6 opgaven. De opgaven die je ziet komen uit oude examens.

Zie hoe ver je komt in deze les.

## Opgave 1

---

De hoeveelheid water die door een rivier wordt afgevoerd, varieert van moment tot moment. De hoeveelheid water die de rivier maximaal kan afvoeren, noemen we de capaciteit van de rivier. Als de capaciteit te laag is, kan de rivier overstromen. Om te kunnen inschatten hoe vaak een overstroming plaatsvindt, gebruiken we het volgende model:

$$C = a - b \cdot \ln \left( \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right) \quad \text{met } T > 1 \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is  $C$  de capaciteit in  $m^3/s$  en  $T$  de zogeheten herhalingstijd. De herhalingstijd is de periode in jaren waarin de waarde van  $C$  gemiddeld één keer wordt overschreden. Als bijvoorbeeld  $T = 40$ , dan zal de rivier gemiddeld één keer in de 40 jaar overstromen. De waarden van  $a$  en  $b$  worden berekend met behulp van gegevens uit het verleden. Er geldt altijd:  $a > 0$  en  $b > 0$ .

Voor de Rijn geldt:  $a = 5734$  en  $b = 1648$ . De capaciteit is  $12000m^3/s$ .

**a** Bereken algebraïsch de herhalingstijd in jaren. Geef je eindantwoord als geheel getal.

- **Bedenk/ schrijf op hoe jij deze vraag zelf zou oplossen**
- **Formuleer de vraag aan ChatGPT, vraag niet alleen om het antwoord, maar ook een uitwerking**
- **Bekijk de uitwerking van ChatGPT. Vergelijk het met je eigen uitwerking, en ga alle stappen af die ChatGPT doorloopt. Gaat alles goed? Maakt hij ergens een fout? Zo ja, waar zit de fout. Wat gaat er allemaal wel goed?**

Uit formule 1 is af te leiden dat voor de afgeleide van  $C$  geldt:

$$\frac{dC}{dT} = \frac{b}{T \cdot (T - 1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \quad \text{met } T > 1 \quad (\text{formule 2}).$$

**b** Bewijs dit.

- Formuleer een vraag aan ChatGPT waardoor hij je een stappenplan geeft om deze vraag op te lossen.
- Bekijk het stappenplan. Denk je dat het klopt? Zijn er genoeg stappen? Zijn er te veel stappen? Zo nee, formuleer je vraag anders en probeer opnieuw.
- Vergelijk het stappenplan dat jij hebt gekregen met die van je medeleerlingen.
- Werk nu zelf de opgave uit met behulp van het stappenplan.
- Kom je goed uit? Heeft het stappenplan je geholpen?

## Opgave 2

---

De functies  $f_p$  en  $g_q$  zijn gegeven door  $f_p = p \ln(x)$  en  $g_q(x) = e^{\frac{x}{q}}$ . De functies  $f_p$  en  $g_q$  zijn elkaars inverse als  $p = q$ . Bewijs dit.

- Werk zelf dit bewijs uit.
- Formuleer een vraag aan ChatGPT waarmee hij hier een bewijs voor gaat maken.
- Bekijk de uitwerking van ChatGPT. Vergelijk het met je eigen uitwerking, en ga alle stappen af die ChatGPT doorloopt.
- Zitten er verschillen in jullie uitwerkingen? Zo ja, klopt er in een van de uitwerkingen iets niet?
- Maakt ChatGPT fouten? Zo ja, waar, en kan je de vraag anders stellen om wel een goed antwoord te krijgen. Wat gaat er allemaal wel goed?
- Welke uitwerking is duidelijker?

### Opgave 3

---

De functie  $f$  is gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)} + \frac{1}{(x-6)}.$$

De functie  $F$  gegeven door

$$F(x) = \ln(x^2 - 11x + 30)$$

is dan een primitieve van  $f$ . Bewijs dit.

- Werk zelf dit bewijs uit.
- Formuleer een vraag aan ChatGPT waardoor hij hiervoor een bewijs voor gaat maken.
- Bekijk de uitwerking van ChatGPT. Vergelijk het met je eigen uitwerking, en ga alle stappen af die ChatGPT doorloopt.
- Zitten er verschillen in jullie uitwerkingen? Zo ja, klopt er in een van de uitwerkingen iets niet?
- Maakt ChatGPT fouten? Zo ja, waar? Zou je de vraag anders stellen om wel een goed antwoord te krijgen? Wat gaat er allemaal wel goed?
- Welke uitwerking is duidelijker?

### Opgave 4

---

Voer een gesprekje met ChatGPT over de afgeleide en de primitieve. Zoek antwoord op de volgende vragen:

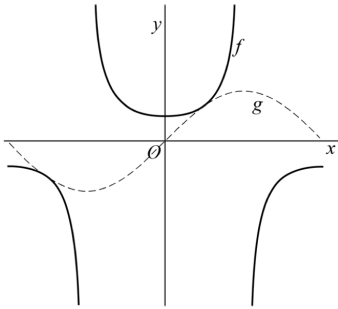
- Wat is een afgeleide?
- Wat kan je allemaal met een afgeleide? Waar is het nuttig voor?
- Wat is een primitieve?
- Wat kan je allemaal met een primitieve? Waar is het nuttig voor?
- Wat hadden we allemaal niet kunnen weten zonder deze concepten?

## Opgave 5

De functie  $f$  is voor  $-\pi < x < \pi$  gegeven door:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}.$$

De functie  $g$  is gegeven door  $g(x) = \sin(x)$ . In figuur 1 zijn de grafieken van  $f$  en  $g$  weergegeven.



Figuur 1

Bewijs dat de grafieken van  $f$  en  $g$  elkaar in twee punten raken.

- Formuleer een vraag aan ChatGPT waardoor hij je een stappenplan geeft om deze vraag op te lossen.
- Bekijk het stappenplan. Denk je dat het klopt? Zijn er genoeg stappen? Zijn er te veel stappen? Zo nee, formuleer je vraag anders en probeer opnieuw.
- Werk nu zelf de opgave uit met behulp van het stappenplan.
- Kom je goed uit? Heeft het stappenplan je geholpen?

## Opgave 6

---

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ . Deze functie heeft een inverse functie  $f^{inv}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$ . Het vlakdeel  $V$  wordt ingesloten door de grafiek van  $f$ , de  $x$ -as, en de  $y$ -as. Vlakdeel  $V$  wordt gewenteld om de  $y$ -as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam. Bereken de inhoud van dit omwentelingslichaam. Geef je eindantwoord in één decimaal.

- **Formuleer een vraag aan ChatGPT waardoor hij je een stappenplan geeft om deze vraag op te lossen.**
- **Bekijk het stappenplan. Denk je dat het klopt? Zijn er genoeg stappen? Zijn er te veel stappen? Zo nee, formuleer je vraag anders en probeer opnieuw.**
- **Werk nu zelf de opgave uit met behulp van het stappenplan.**
- **Kom je goed uit? Heeft het stappenplan je geholpen?**