

# Combinatoriek voor enigma

June 24, 2024

Tellen is iets dat we allemaal op de basisschool geleerd hebben. Voor kleine hoeveelheden kunnen we tellen vaak uit ons hoofd, maar wanneer de getallen wat groter worden, is het handiger om een slimmere manier te gebruiken. Denk aan:

1. Het tellen van het aantal manieren waarop je 6 dobbelstenen kan gooien.
2. Het tellen van het aantal manieren waarop je uit een bak met 30 sokken, paren kan maken.
3. Het aantal vijfletterige codes die je kan maken met de letters uit het alfabet.

Om bovenstaande zaken te tellen, zijn we onnodig veel tijd kwijt. Gelukkig komt de wiskunde ons hierbij helpen; er zijn namelijk handige manieren om te tellen.

## 1 Faculteit

### 1.1 Introductie

De **faculteit** van een getal  $n$ , wordt aangegeven door  $n!$ . De faculteit van een getal betekent het volgende:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

De faculteit van een getal vermenigvuldigt alle gehele, positieve getallen kleiner dan zichzelf, met het getal zelf. Doordat we veel getallen met elkaar vermenigvuldigen, wordt de faculteit van een getal snel groot. Zo is  $20! \approx 2.43 \cdot 10^{18}$ .

**Afspraak:** Binnen de wiskunde zeggen we dat  $0! = 1$ .

#### 1.1.1 Voorbeelden

$$\begin{aligned}1! &= 1 \\2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120\end{aligned}$$

Wanneer we faculteiten door elkaar delen, kunnen we de gemeenschappelijke termen wegstrepen. De termen die zowel in de teller als de noemer staan, vallen tegen elkaar weg. Zo geldt er voor  $k < n$  dat:

$$\frac{n!}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = n \cdot (n-1) \cdot (k+2) \cdot (k+1)$$

### 1.1.2 Voorbeelden

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

## 1.2 Faculteiten binnen combinatoriek

Faculteiten komen erg handig van pas bij telproblemen waar herhaling **niet** toegestaan is. Denk aan telproblemen als:

**1. Het aantal mogelijke tiencijferige codes, waar elk getal maar 1 keer voor mag komen.**

We hebben in totaal tien cijfers die we in de code kunnen zetten, namelijk  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ . Voor de eerste plek in de code hebben we 10 keuzes. Omdat herhaling niet toegestaan is, hebben we voor de tweede plek in de code, nog maar 9 keuzes over. We hebben tenslotte al 1 ander getal gebruikt. Voor de derde plek hebben we nog 8 keuzes over, voor de vierde plek hebben we nog 7 keuzes over etc. Als we het totaal aantal mogelijkheden willen tellen, willen we dus alle opties met elkaar vermenigvuldigen. Het aantal mogelijkheden wordt dan:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

**2. Het aantal mogelijke volgordes waarop je 6 ballen van verschillende kleuren uit een vaas kan halen.**

We hebben in totaal 6 ballen in een vaas zitten. Omdat ze allemaal verschillende kleuren hebben, kunnen we ze nummeren met de getallen 1 t/m 6. Wanneer twee ballen dezelfde kleur zouden hebben, zijn ze wiskundig gezien 'dezelfde' bal. Voor de eerste bal die we pakken, hebben we precies 6 opties. Nadat we de eerste bal uit de vaas hebben gehaald, blijven er 5 ballen achter in de vaas. Voor onze volgende bal, hebben we dus nog 5 opties over. Voor de derde bal hebben we er nog 4 over etc. Vermenigvuldigen we alle opties met elkaar, hebben we in totaal dus:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

Mogelijke volgordes waarop we 6 ballen uit een vaas kunnen pakken.

**3. Het aantal volgordes waarop je 20 leerlingen in een rij kan zetten.**

We hebben in totaal 20 leerlingen in onze groep. Omdat geen enkele leerling hetzelfde is, kunnen we de leerlingen de getallen 1 t/m 20 geven. Voor de eerste positie in de rij, hebben we keuze uit 20 leerlingen. Voor de tweede plek in de rij, hebben we er nog 19, omdat er op de eerste plek al een leerling staat. Voor de derde plek hebben we nog 18 leerlingen over etc. In totaal hebben we dus:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 20!$$

Mogelijke volgordes waarop we 20 leerlingen op een rij kunnen zetten.

Zoals we in de drie bovenstaande voorbeelden zien, kan het erg handig zijn om de dingen die we willen tellen, te nummeren. Zo kan je je telprobleem makkelijker vertalen naar 'wiskunde taal'.

### 1.2.1 Om te onthouden

- De faculteit van een getal  $n$  wordt opgeschreven net  $n!$  en vermenigvuldigt alle gehele, positieve getallen kleiner dan het getal met zichzelf
- De faculteit telt het aantal combinaties **zonder** herhaling.

## 2 Binomiaalcoëfficiënten

### 2.1 Introductie

Binnen de wiskunde hebben we ook telproblemen waar de volgorde **niet** belangrijk is. Bij telproblemen waarbij we  $k$  objecten uit een groep van  $n$  objecten willen kiezen, gebruiken we **binomiaalcoëfficiënten**. Denk bijvoorbeeld aan het aantal manieren waarop we 4 leerlingen uit een groep van 12 leerlingen kunnen kiezen.

Als we 4 leerlingen uit een groep van 12 leerlingen willen kiezen, hebben we voor de eerste leerling 12 keuzes, voor de tweede leerling 11 keuzes, voor de derde leerling 10 keuzes en voor de vierde leerling 9 keuzes. In totaal hebben we dus  $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 1180$  mogelijke groepen. Echter, moeten we rekening houden met het feit dat de groep  $\{A, B, C, D\}$  hetzelfde is als de groep  $\{B, D, C, A\}$ . We willen dus nog alle verschillende volgordes, wegdelen. Hebben we in totaal 4 letters, dan hebben we  $4!$  volgordes. Hier willen we dus nog door delen. In totaal hebben we dan:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{12!}{8!4!}$$

Hier hebben we in de laatste stap weer gebruik gemaakt van het volgende:

$$\begin{aligned} \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{12!}{8!4!} = \frac{12!}{(12-4)!4!} \end{aligned}$$

Zo kunnen we ons eindantwoord uitdrukken in faculteiten van de begincondities. Het getal dat hier uit is gekomen, noemen we een binomiaalcoëfficiënt, en schrijven we op als:  $\binom{12}{4}$ .

#### 2.1.1 Definitie

In het algemeen geldt er, als we  $k$  objecten uit een groep van  $n$  objecten willen kiezen, dat dat op:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Manieren doen. Dit spreken we uit als  $n$  boven  $k$ .

### 2.2 Binomiaalcoëfficiënten binnen de combinatoriek

We gebruiken binomiaalcoëfficiënten binnen de combinatoriek wanneer we willen weten op hoeveel manieren we  $k$  objecten kunnen kiezen uit een verzameling van  $n$  objecten. Hiervoor gebruiken we de notatie  $\binom{n}{k}$ . Wanneer we de binomiaalcoëfficiënt gebruiken, delen we de herhalingen al weg in onze binomiaalcoëfficiënt. We hoeven dus niet nog een keer te delen door het aantal mogelijke herhalingen. Dit kan met de optie nCr op je rekenmachine.

**2.2.1 Om te onthouden**

- Voor de binomiaalcoëfficiënt geldt er:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Dit is het aantal manieren waarop we  $k$  objecten uit een verzameling van  $n$  objecten kunnen kiezen

- Op je grafische rekenmachine, kan je dit getal berekenen met `NCR`.