

Pythagoras werkblad 3

Robin van den Bergh, Rafaël Bakker, Leon Min

March 2023

Introductie

In de vorige les hebben we gezien dat de formule voor de maximale inhoud van een kegel met een zijkant van 10 cm ongeveer 403cm^2 is. In deze les gaan we kijken naar wat de inhoud is van een tipi. Een tipi is een soort tent die gebruikt werd door de Indianen in Noord-Amerika. Om een tipi te maken teken je een cirkel, waarna je stokken op de rand van cirkel zet en die bovenin met elkaar verbind. Als je vervolgens een tentdoek om de stokken heen wikkelt heb je een tent.



Als je het aantal stokken van een tipi verandert, dan verandert ook de vorm. Het grondvlak van de tipi kan een 5-hoek zijn als je 5 stokken gebruikt. De vraag is nu: hoe bereken je de inhoud van zo'n tipi als je het aantal stokken weet?

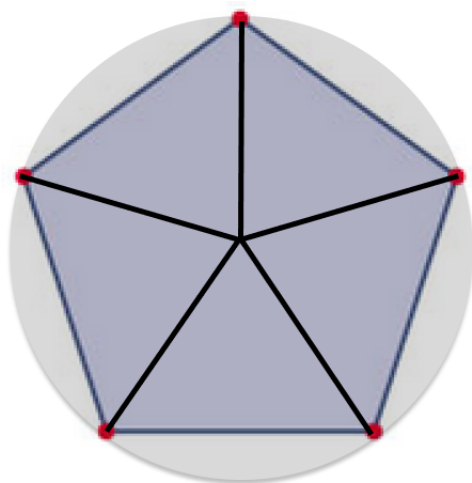
Hieronder gaan we een voorbeeld laten zien van hoe dat moet met een tipi die 5 stokken heeft, waar alle stokken even ver uit elkaar staan. Dus het grondvlak van de tipi is een regelmatige 5-hoek.

Voorbeeld

Om te beginnen geven we de formule van de inhoud van een tipi (hetzelfde als de formule van een kegel):

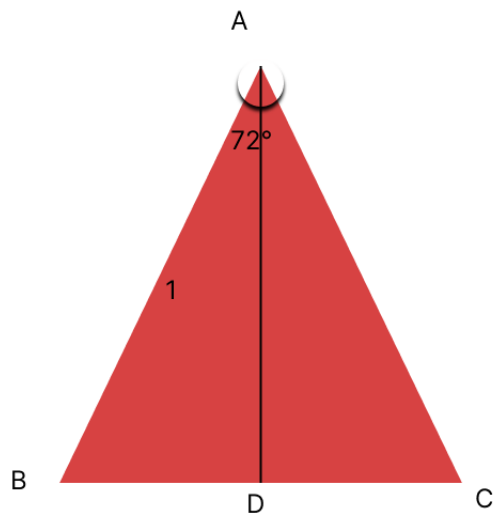
$$\frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}.$$

In dit voorbeeld hebben we een tipi die een hoogte heeft van 10, en de stokken staan even ver uit elkaar en liggen op een cirkel met straal 1. Om onze formule te gebruiken hebben we alleen nog de oppervlakte van het grondvlak nodig. Ons grondvlak is een 5-hoek, die we in 5 driehoeken kunnen verdelen. Dat ziet er als volgt uit:



Alle 5 driehoeken zijn hetzelfde, dus we hoeven alleen de oppervlakte van één zo'n driehoek te vinden. Want 5 keer de oppervlakte van 1 driehoek is hetzelfde als de oppervlakte van de hele 5-hoek.

Nu gaan we 1 zo'n driehoek los bekijken. We kunnen in het plaatje zien dat 2 van de 3 zijdes gelijk zijn aan 1, want de straal van de cirkel is 1. Dus onze driehoek is gelijkbenig. Ook is 1 van de hoeken gelijk aan $360^\circ : 5 = 72^\circ$, omdat we de 360° van de 5-hoek in 5 gelijk stukken verdelen. Dus de afmetingen van de driehoek zien er als volgt uit:



Nu kunnen met behulp van de sinus en cosinus berekenen dat:

$$\begin{aligned} AD &= \cos(36^\circ) \\ BD &= CD = \sin(36^\circ) \end{aligned}$$

De driehoeken $\triangle ABD$ en $\triangle ACD$ hebben dezelfde oppervlakte. Dus de oppervlakte van de driehoek $\triangle ABD$ is nu gelijk aan:

$$\Delta ABD = \frac{1}{2} \cdot \sin(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ)$$

Dus de oppervlakte van $\triangle ABC$ is nu:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \sin(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ) + \frac{1}{2} \cdot \sin(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ) \\ &= \sin(36^\circ) \cdot \cos(36^\circ) \end{aligned}$$

Met de verdubbelingsformule kunnen we dit nog opschrijven als $\frac{1}{2} \sin(72^\circ)$. De oppervlakte van onze hele 5-hoek is nu

$$5 \cdot \frac{1}{2} \sin(72^\circ) = \frac{5}{2} \sin(72^\circ) \approx 2.378.$$

De inhoud van onze 5-hoekige tipi kunnen we nu berekenen door de formule te gebruiken:

$$\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \sin(72^\circ) \times 10 \approx 7.93.$$

Opgave 1

Reken nu de oppervlakte uit van een regelmatige 7-hoek die op een cirkel ligt met straal 1. Reken daarna de inhoud uit van de tipi met 7 stokken die een hoogte van 10 heeft.

Opgave 2

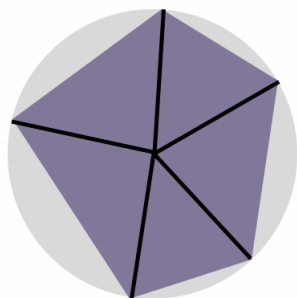
Stel we hebben een tipi met 9 palen, met hoogte van 10. Bereken de inhoud van de tipi

Bonus Opgave

Kan je aan de hand van deze voorbeelden bedenken wat de algemene formule is voor het grondvlak van een tipi met n palen, die even ver uit elkaar staan?

Opgave 3

Denk je dat je ook de inhoud van een tipi met 5 stokken kunt berekenen, waar de stokken niet even ver uit elkaar liggen? Kan dit op dezelfde manier als in het voorbeeld, denk je? Leg je antwoord uit. Hieronder zie je een voorbeeld van hoe zo'n grondvlak eruit kan zien.



Bonus Opgave

Bereken de maximale inhoud van een tipi met 5 stokken van lengte 10, die even ver uit elkaar staan.

Samenvatting

In werkblad 1 hebben we de formule voor de inhoud van een kegel opgesteld, in werkblad 2 hebben we deze gemaximaliseerd en in dit werkblad hebben we de formule opgesteld voor de inhoud van een tipi. Je kunt nog verder rekenen aan de inhoud van een tipi! Met de kennis van deze drie werkbladen zijn de opgaven in [https://pyth.eu/wat-hebben-een-frietzak-en-een-tent-met-elkaar-te-maken goed te doen!](https://pyth.eu/wat-hebben-een-frietzak-en-een-tent-met-elkaar-te-maken-goed-te-doen!)