

uitwerkingen Pythagoras werkblad 3

Robin van den Bergh, Rafaël Bakker, Leon Min

March 2023

Opgave 1

Deel eerst de 7-hoek in 7 gelijkbenige driehoeken. Deze hebben allemaal dezelfde oppervlakte. De oppervlakte van een zo'n driehoek is:

$$\sin\left(\frac{360^\circ}{14}\right) \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{14}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right)$$

Dus de oppervlakte van de hele 7-hoek is:

$$\frac{7}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right).$$

De inhoud van de tipi is nu:

$$\frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{7}\right) \times 10 \approx 9.121.$$

Opgave 2

Deel eerst de 9-hoek in 9 gelijkbenige driehoeken. Deze hebben allemaal dezelfde oppervlakte. De oppervlakte van een zo'n driehoek is:

$$\sin\left(\frac{360^\circ}{18}\right) \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{18}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{9}\right)$$

Dus de oppervlakte van de hele 9-hoek is:

$$\frac{9}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{9}\right).$$

De inhoud van de tipi is nu:

$$\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{9}\right) \times 10 \approx 9.642.$$

Bonus opgave

De algemene formule voor het grondvlak van een tipi met n palen, die even ver uit elkaar staan en op de cirkel met straal 1 liggen is:

$$\frac{n}{2} \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right).$$

Opgave 3

Je kunt ook de oppervlakte van een niet regelmatige 5-hoek berekenen, maar dan hebben de 5 gelijkbenige driehoeken, waarin je de 5-hoek verdeelt allemaal een andere oppervlakte. Je moet al die oppervlakten dus los van elkaar uitrekenen.

Bonus Opgave

Ik noem de afstand van een hoekpunt naar het middelpunt r en de hoogte h . Druk eerst h uit in termen van r :

$$h = \sqrt{10^2 - r^2}.$$

De oppervlakte van het grondvlak wordt nu gegeven door:

$$\frac{5r}{2} \sin(72^\circ).$$

Vul dit in in de formule voor de inhoud van de tipi.

$$I(r) = \frac{1}{3} \times \frac{5r}{2} \sin(72^\circ) \times \sqrt{10^2 - r^2}.$$

Deze formule gaan we nu afleiden en gelijk stellen aan 0, om de optimale waarde voor r vinden.

$$\begin{aligned} I'(r) &= \frac{5}{6} \sin(72^\circ) r \cdot \frac{-2r}{2\sqrt{100 - r^2}} + \frac{5}{6} \sin(72^\circ) \cdot \sqrt{100 - r^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{5}{6} \sin(72^\circ) r \cdot -r + \frac{5}{6} \sin(72^\circ) \cdot (100 - r^2) = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{5}{6} \sin(72^\circ) (2r^2 - 100) = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - 50 = 0 \\ &\Rightarrow r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vul dit nu in in $I(r)$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{2}}{2} \sin(72^\circ) \times \sqrt{10^2 - 50} \\ &= \frac{125\sqrt{2}}{6} \sin(72^\circ) \approx 28.021. \end{aligned}$$