

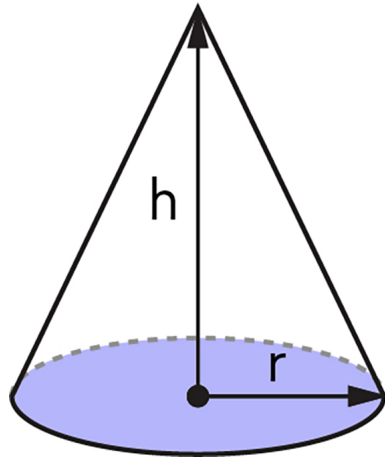
Pythagoras lesplan

Robin van den Bergh, Rafaël Bakker, Leon Min

March 2023

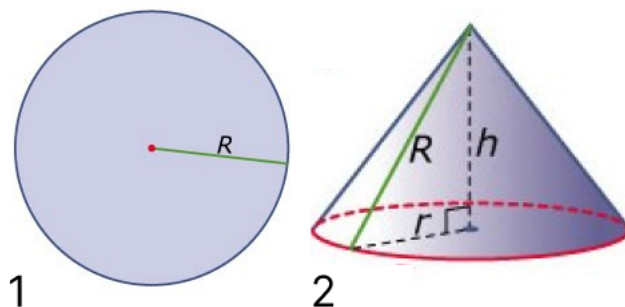
Introductie

Jullie hebben vast allemaal wel eens een frietzak gezien. Maar hoe maak je de grootste frietzak? De vorm van een frietzak noemen we een kegel. Een kegel bestaat uit een cirkel als grondvlak en een top die precies boven het midden van de cirkel ligt met een bepaalde hoogte. Als je nu elk punt van de cirkel verbindt met de top heb je een kegel. De straal van de cirkel, die het grondvlak is noemen vaak r en de lengte van het grondvlak naar de top, ook wel de hoogte, noemen we h .



Kegel vouwen

Je kunt zelf ook een kegel vouwen. Neem een stuk papier en knip er een cirkel uit. Maak een inkeping van de zijkant naar het middenpunt van de cirkel en schuif de twee flappen over elkaar. Nu heb je een kegel. Hoe ver je de flappen over elkaar schuift heeft invloed op de inhoud van de kegel.



Opgave 1

Vouw zelf een kegel en meet de straal r van je grondvlak en de hoogte h van de kegel. Probeer de inhoud zo groot mogelijk te maken

Inhoud van een kegel

In dit deel gaan we een formule afleiden voor de inhoud van een kegel. We geven eerst de formule zodat je de inhoud van je kegel alvast kan berekenen. Bij een kegel zijn er twee delen belangrijk:

- De straal van het grondvlak, die we r noemen;
- De hoogte tot de top, die we h noemen.

De inhoud van een kegel bereken je met de formule:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte}; \\ & = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$

Opgave 2

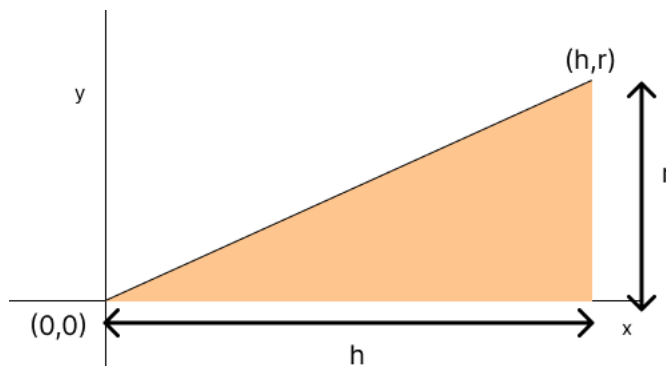
Bereken de inhoud van je zelf gemaakte kegel.

Hoe komen we aan de formule van kegel?

Nu willen op een andere manier een kegel maken. We gaan een rechte lijn om de x -as wentelen. Het eerste wat we daarvoor nodig hebben is een rechte lijn.

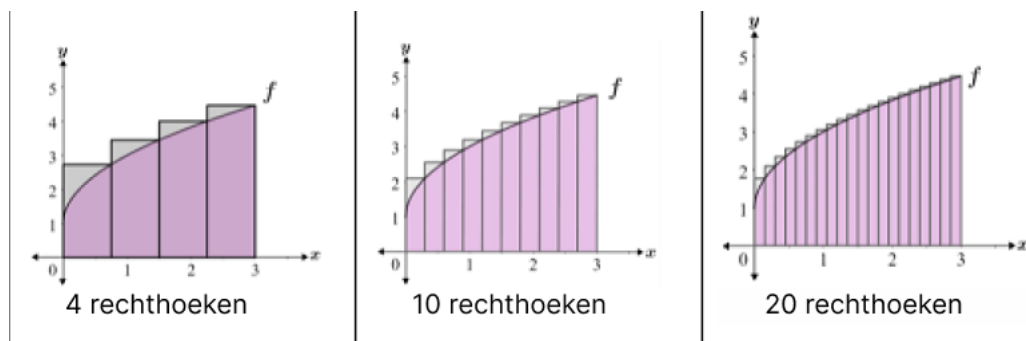
Opgave 3

Stel een functie op voor de lijn, die door de punten $(0,0)$ en (h,r) gaat. Bekijk het plaatje beneden.



Integreren

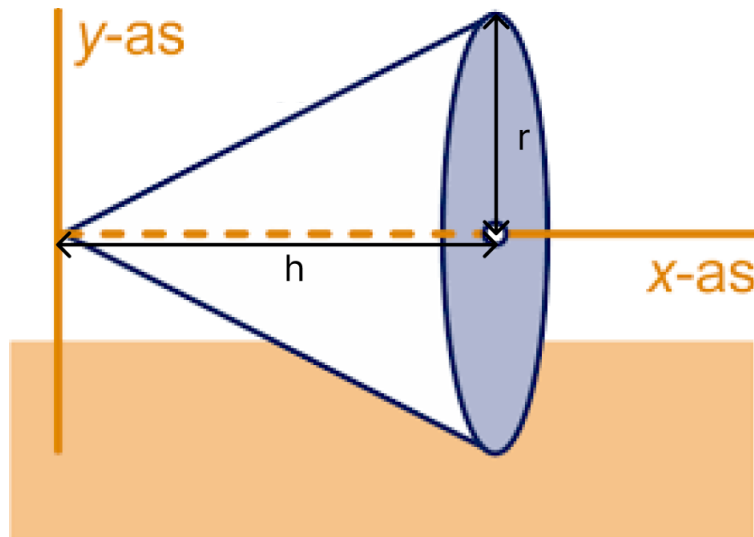
Eerst even een korte herhaling voor integreren. Als we een oppervlakte willen berekenen, verdelen we deze in kleine rechthoekjes. Als we de breedte van de rechthoekjes steeds smaller maken, krijgen we een steeds betere benadering van de oppervlakte, zoals in het plaatje hieronder.



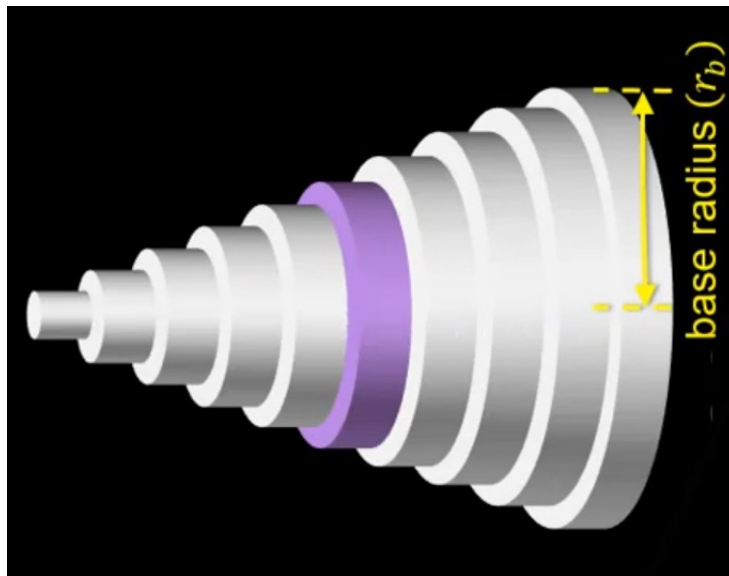
De optelling van oneindig kleine rechthoekjes noemen we een integraal.

Omwentelingen

Nu willen we de lijn die we gevonden hebben bij opgave 3 om de x -as wentelen. Dat ziet er als volgt uit:



Nu zien we dat we ook een kegel hebben. De hoogte van deze kegel is h en de straal van het grondvlak is r . Maar we willen we niet de oppervlakte, maar de inhoud van deze kegel weten. Dit kunnen we doen met integreren. Net als bij de oppervlaktes kunnen we de kegels in plakjes snijden. Als we nu de inhoud van alle plakjes berekenen hebben we de inhoud van de kegel.



Dan moeten we eerst weten wat de inhoud is van 1 plakje. Zo'n plakje is eigenlijk een hele platte cilinder.

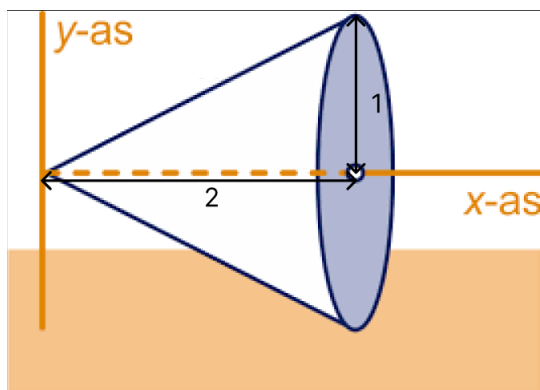
Opgave 4

Wat is de straal van het grondvlak van één van deze plakjes? En wat is de inhoud van een plakje van de kegel, als de dikte van het plakje 1 is?

We gaan nu al deze plakjes bij elkaar optellen om de inhoud te bepalen. De som van alle plakjes is een integraal, met daarbinnen de inhoud van 1 zo'n plakje. Wij gaan nu een voorbeeld bekijken.

Opgave 5

We hebben een kegel met de volgende afmetingen:



- (a) Bepaal de formule voor de lijn, die om de x-as gewenteld wordt.
- (b) Bereken de volgende integraal:

$$\int_0^2 \pi \left(\frac{1}{2}x \right)^2 dx$$

- (c) Controleer je antwoord van 5b doormiddel van de formule van een kegel.

Samenvatting

We hebben zelf een kegel gevouwen en gezien dat de inhoud van een kegel berekend kan worden met $\frac{1}{3} \pi r^2 h$. Je kunt aan je docent vragen wat de maximale inhoud is voor van jullie kegel. Hoe ver zaten jullie er naast? Waarom is dat denk je? In de volgende les gaan we kijken waarom dit de maximale inhoud is.